ESEMPI

1. $6x^2 - 9 = -3x^2 + 16$

$6x^2 + 3x^2 = 9 + 16$

$9x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$

2. $x^2 + 2x - 49 = 2(x-1) + 2$

$x^2 + \cancel{2x} - 49 = \cancel{2x} - \cancel{2} + \cancel{2}$

$x^2 = 49$

$x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Equazione di 2° grado riducibile al 1° grado

Consideriamo un'equazione di 2° grado data come prodotto di due fattori che siano polinomi di 1° grado:

$(x-4)(x-7) = 0$

Per risolverla ricordiamo che *un qualsiasi prodotto è uguale a zero se almeno uno dei fattori è uguale a zero*, allora l'equazione data sarà vera se risulta:

$x - 4 = 0$ oppure $x - 7 = 0$ cioè $\begin{cases} x = 4 \\ x = 7 \end{cases}$

Diremo che le soluzioni $x = 4$ e $x = 7$ delle equazioni di 1° grado $x - 4 = 0$ e $x - 7 = 0$ sono le soluzioni dell'equazione di 2° grado da cui siamo partiti.

ESEMPI

1. $(x+4)(x-9) = 0$

$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = 9 \end{cases}$

2. $(2x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$

$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Disuguaglianze e disequazioni

Abbiamo parlato di equazione come di traduzione in termini matematici di frasi aperte quali:

"Il triplo di un numero aumentato di 3 è uguale a 7" $\rightarrow$ $3x + 3 = 7$

"La metà di un numero diminuito di 4 è uguale al suo doppio" $\rightarrow$ $\frac{x}{2} - 4 = 2x$

Consideriamo adesso le seguenti frasi aperte:

a) "Il triplo di un numero diminuito di 4 è minore di 21"

b) "Il triplo di un numero aumentato di 7 è maggiore di – 13"

e traduciamole in termini matematici:

a) $3x - 4 < 21$ **b)** $3x + 7 > -13$

Le due scritture precedenti sono disuguaglianze contenenti lettere a cui si dà il nome di **disequazioni**; esattamente diremo allora:

Le disuguaglianze che traducono in termini matematici delle frasi aperte si dicono *disequazioni.*

O anche:

Una *disequazione* è una disuguaglianza fra due espressioni (di cui almeno una letterale) verificata per particolari valori dell'incognita.

I valori che rendono vera la frase aperta, ovvero la disuguaglianza, costituiscono le soluzioni della disequazione; queste, generalmente, formano un insieme che può essere finito, infinito o vuoto, che si chiama *insieme verità* della disequazione.

ESEMPI

1. $x > 6$

Le soluzioni di questa disequazione nell'insieme N sono 7; 8; 9..., quindi l'insieme verità è l'insieme infinito $\{7; 8; 9; 10; \ldots\}$.

2. $x < 4$

Le soluzioni di questa disequazione nell'insieme N sono 3; 2; 1 e 0, quindi l'insieme verità è l'insieme finito $\{0; 1; 2; 3\}$.

3. $x < 0$

Nell'insieme N, questa disequazione non ha soluzione, quindi l'insieme verità è $\varnothing$.

Per la risoluzione di una disequazione intera di 1° grado a una incognita (noi ci occuperemo solo di questa) vediamo brevemente alcune sue proprietà che in parte sono analoghe a quelle delle equazioni.

- *Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.*
- 1° *principio di equivalenza:*

  Addizionando o sottraendo a entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero si ottiene una disequazione equivalente.

ESEMPIO

- $x < 5 \rightarrow$ l'insieme delle sue soluzioni in N è $\{4; 3; 2. 1; 0\}$.

  Addizionando 2 a entrambi i membri si ottiene:

  $x + 2 < 5 + 2$ da cui $x + 2 < 7$

  L'insieme delle soluzioni in N è ancora $\{4; 3; 2; 1; 0\}$.

- *In una disequazione un termine può essere spostato da un membro all'altro purché si cambi di segno (legge del trasporto).*

- 2° *principio di equivalenza:*

  Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero positivo si ottiene una disequazione equivalente.

- *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero negativo si ottiene una disequazione equivalente ma di verso opposto (il > diventa < e viceversa).*

ESEMPI

1. $x > 7$ → l'insieme delle soluzioni in $\boldsymbol{N}$ è $\{8; 9; 10; 11; \ldots\}$.

Moltiplichiamo entrambi i membri per 2:

$2x > 14$ → l'insieme delle soluzioni in $\boldsymbol{N}$ è ancora $\{8; 9; 10; 11 \ldots\}$

2. $x < 2$ → l'insieme delle soluzioni in $\boldsymbol{N}$ è $\{1; 0\}$.

Moltiplichiamo entrambi i membri per -3;

$-3x < -6$ → affinché l'insieme delle soluzioni sia ancora $\{1; 0\}$ è necessario cambiare il verso della disequazione:

$-3x > -6$ → l'insieme delle soluzioni in $\boldsymbol{N}$ è ancora $\{1; 0\}$.

- *Cambiando il segno a tutti i termini di una disequazione si ottiene una disequazione equivalente ma di verso opposto.*

Risoluzione di disequazioni e rappresentazione grafica delle soluzioni

Risolviamo alcune disequazioni ridotte in forma normale:

1) $7x > 14$

Dividendo entrambi i membri per 7, otteniamo: $\boldsymbol{x > 2}$

L'insieme delle soluzioni può essere rappresentato sulla retta orientata dalle immagini di tutti i numeri reali maggiori di 2 (Fig. 1).

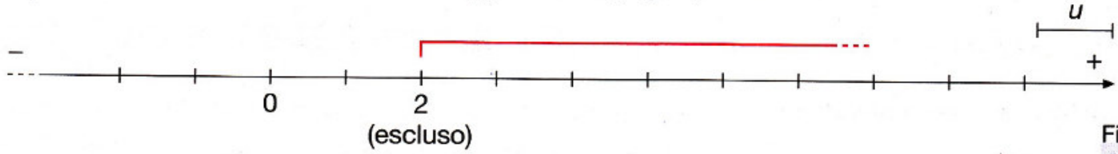


Figura 1

2) $5x > -25$

Dividendo entrambi i membri per 5 otteniamo: $\boldsymbol{x > -5}$

L'insieme delle soluzioni può essere rappresentato sulla retta orientata dalle immagini di tutti i numeri reali maggiori di -5 (Fig. 2).

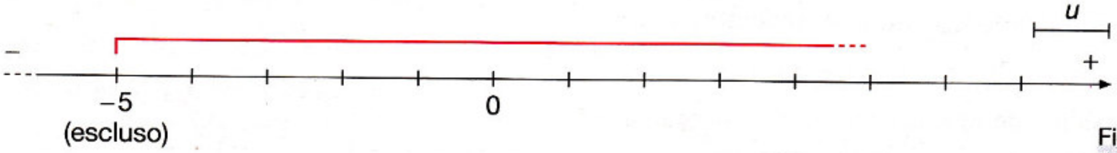


Figura 2

2. $\dfrac{3x+1}{2}+1>\dfrac{x+2}{2}$

Eliminiamo i denominatori moltiplicando tutti i termini per il m.c.m. dei denominatori che è 2:

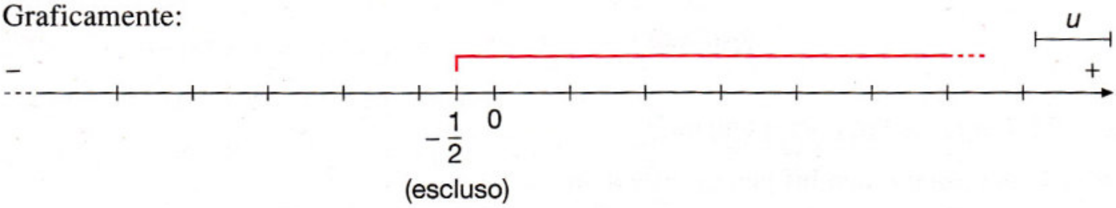
$$\cancel{2}^{\,1}\cdot\frac{3x+1}{\cancel{2}_{\,1}}+2\cdot 1>\cancel{2}^{\,1}\cdot\frac{x+2}{\cancel{2}_{\,1}} \qquad \text{da cui:} \qquad 3x+1+2>x+2$$

Trasportiamo al primo membro i termini in x e al secondo i termini noti: $3x-x>-1-\cancel{2}+\cancel{2}$

Eseguiamo le addizioni algebriche: $2x>-1$

Dividiamo per 2: $\mathbf{x>-\dfrac{1}{2}}$

Graficamente:



Disequazioni determinate, indeterminate e impossibili

Se indichiamo la generica disequazione in forma normale con la scrittura $ax>b$ o $ax<b$ possiamo ancora discuterne la soluzione secondo i valori di a e b.

1° caso $\quad ax>b \quad$ con a e $b\neq 0$
$\quad ax<b \quad$ con a e $b\neq 0$

sono **disequazioni determinate** perché ammettono rispettivamente le soluzioni $x>\dfrac{b}{a}$ e $x<\dfrac{b}{a}$.

2° caso $\quad ax>b \quad$ con $a\neq 0$ e $b=0$
$\quad ax<b \quad$ con $a\neq 0$ e $b=0$

sono **disequazioni determinate** perché ammettono rispettivamente le soluzioni $x>\dfrac{0}{a}=0$ e $x<\dfrac{0}{a}=0$.

3° caso $\quad ax>b \quad$ con $a=0$ e $b>0$

è una **disequazione impossibile** in quanto avremo $0x>b$ ovvero $0>b$, cosa impossibile in quanto lo zero è sempre minore di un qualsiasi numero positivo.

4° caso $\quad ax>b \quad$ con $a=0$ e $b<0$

è una **disequazione indeterminata** in quanto avremo $0x>b$ ovvero $0>b$, e sappiamo che lo zero è sempre maggiore di un numero negativo.

5° caso $\quad ax<b \quad$ con $a=0$ e $b>0$

è una **disequazione indeterminata** in quanto avremo $0x<b$ ovvero $0<b$ sempre vero in quanto lo zero è sempre minore di un numero positivo.

6° caso $\quad ax<b \quad$ con $a=0$ e $b<0$

è una **disequazione impossibile** in quanto avremo $0x<b$ ovvero $0<b$ e lo zero non è mai minore di un numero negativo.

402 $6x(1+x)-3(x-1)=3x+4-3x^2$ $\left[\pm\frac{1}{3}\right]$

403 $2(x+1)(x-1)=\frac{21}{2}$ $\left[\pm\frac{5}{2}\right]$

404 $(x-4)^2-8=-4(2x+2)$ [**impossibile**]

405 $(x-3)^2=-3(2x-15)$ $[\pm 6]$

406 $(2x+3)(2x-3)-5=2$ $[\pm 2]$

407 $7x(4x-2)+2(x-20)=-3x(7x+4)+41$ $\left[\pm\frac{9}{7}\right]$

408 $\frac{5x^2-1}{2}=\frac{2}{5}$ $\left[\pm\frac{3}{5}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni di 2° grado riconducibili a due di 1° grado.

409 $(x-11)(x+5)=0$ $[11;-5]$

410 $x(3x-7)=0$ $\left[0;\frac{7}{3}\right]$

411 $(5x+2)(x-4)=0$ $\left[-\frac{2}{5};4\right]$

412 $(7x-7)\left(3x+\frac{3}{5}\right)=0$ $\left[1;-\frac{1}{5}\right]$

413 $3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$ $\left[2;-\frac{2}{3}\right]$

414 $(x+9)(3x-15)=0$ $[-9;5]$

Disuguaglianze e disequazioni

Risolvi le seguenti disequazioni e rappresenta le soluzioni sulla retta orientata.

415 $3x>21$; $15x\leqslant 18$; $3x<27$.

416 $-5x<10$; $8x>-24$; $-6x\leqslant 48$.

417 $4x>28$; $36x\leqslant 24$; $5x<45$.

418 $-7x<14$; $2x>-12$; $-4x\leqslant 40$.

419 $3x>17$; $7x\leqslant 12$; $5x<21$.

420 $-4x<21$; $3x>-11$; $-6x\leqslant 37$.

421 $\frac{2}{5}x > 8;\quad -\frac{3}{2}x \leqslant 9;\quad -\frac{1}{4}x < -\frac{3}{8}.$ $\left[x > 20;\ x \geqslant -6;\ x > \frac{3}{2}\right]$

422 $-\frac{3}{7}x < 9;\quad \frac{4}{7}x > -8;\quad -\frac{5}{8}x \leqslant 10.$ $[x > -21;\ x > -14;\ x \geqslant -16]$

423 $-\frac{4}{7}x < \frac{2}{21};\quad \frac{5}{9}x \leqslant \frac{10}{3};\quad -\frac{6}{5}x < \frac{8}{15}.$ $\left[x > -\frac{1}{6};\ x \leqslant 6;\ x > -\frac{4}{9}\right]$

424 $x - 5 > 8;\quad x + 4 < 7;\quad x - 3 \leqslant 5.$ $[x > 13;\ x < 3;\ x \leqslant 8]$

425 $-x + 7 \geqslant 2;\quad x + 2 \leqslant 2;\quad -x - 4 < -8.$ $[x \leqslant 5;\ x \leqslant 0;\ x > 4]$

426 $3x + 4 < 5x - 2;\quad 13x + 1 > 9x - 7.$ $[x > 3;\ x > -2]$

427 $5x - 3 > 7x - 4;\quad 15x + 7 \leqslant 10x + 3.$ $\left[x < \frac{1}{2};\ x \leqslant -\frac{4}{5}\right]$

428 $13x + 2 - 4x > 6x + 3$ $\left[x > \frac{1}{3}\right]$

429 $3(2x - 3) \leqslant 4x - 7$ $[x \leqslant 1]$

430 $\frac{1}{2}x + 4 - 3x > 5x - \frac{3}{2}$ $\left[x < \frac{11}{15}\right]$

431 $2(5x - 2) + 3(4 - 3x) < 4x + 10$ $\left[x > -\frac{2}{3}\right]$

432 $-4(x + 2) + 7x - 3 \geqslant 5(3x + 2) - 7$ $\left[x \leqslant -\frac{7}{6}\right]$

433 $5(3x + 7) - 10x > 5(x + 10)$ [impossibile]

434 $7(2x + 3) - 4x < 2(5x + 15)$ [indeterminata]

435 $x + \frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$ $\left[x \geqslant -\frac{1}{5}\right]$

436 $\frac{x + 8}{2} < x + \frac{3(x - 1)}{2}$ $\left[x > \frac{11}{4}\right]$

437 $x + \frac{1}{3} - 2 \geqslant -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\left[x \geqslant \frac{6}{5}\right]$

438 $\frac{6x + 11}{2} < \frac{3}{2}(2x + 1)$ [impossibile]

439 $2x - 5(3x + 2) > x - 1 + 2(x + 3)$ $\left[x < -\frac{15}{16}\right]$

440 $3x + (x + 1)^2 > (x - 1)(x + 1) - 3x$ $\left[x > -\frac{1}{4}\right]$

441 $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 - 6x < 8x - 4$ $\left[x > \frac{2}{5}\right]$

442 $\frac{5}{2}x + \frac{1}{4} - 3x < 1 - \frac{2}{3}x - x$ $\left[x < \frac{9}{14}\right]$

443 $\frac{3x - 1}{2} - \frac{4x - 1}{3} \geqslant \frac{2}{3} - x$ $\left[x \geqslant \frac{5}{7}\right]$

444 $\frac{x - 3}{5} - \frac{2x + 1}{3} - 1 < \frac{4x - 1}{15} + 2x$ $\left[x > -\frac{28}{41}\right]$

445 $\frac{7x - 3}{4} - \frac{2x - 1}{3} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{3 - 2x}{6} - \frac{1}{4}$ $\left[x \leqslant \frac{14}{17}\right]$

446 $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 + 1 < (x - 1)(x + 1) - (x + 1)^2$ $[x < 0]$

447 $\frac{x - 1}{3} - \frac{4x + 1}{2} - 2 < 8 - \frac{3x + 6}{4} - x$ $[x < 112]$

448 $(x - 3)^2 - 4x < (x + 1)^2 - 2x + 1$ $\left[x > \frac{7}{10}\right]$

449 $\frac{x}{5} - \frac{x + 1}{4} - \frac{x - 1}{2} \geqslant \frac{1}{10} - \frac{3x + 1}{4}$ $[x \geqslant -2]$

450 $\frac{x - 3}{6} - \frac{2x - 1}{7} - 1 < \frac{2x - 1}{3} - 2x$ $\left[x < \frac{43}{51}\right]$

451 $(x - 4)(x + 4) - 2x > (x - 1)^2 - 3$ [impossibile]

452 $\frac{x}{3} - \frac{5x - 2}{2} - \frac{1}{6} > 0$ $\left[x < \frac{5}{13}\right]$

453 $\frac{2x - 3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x - 1}{3} > 1 - \frac{5x - 5}{3}$ $\left[x > \frac{13}{10}\right]$

454 $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 6x^2 - 3 \leqslant 4x - 5$ $[x \geqslant 0]$

455 $x(x - 3) - x(x - 4) - 5x - 8(x - 3) > 0$ $[x < 2]$

456 $(x - 1)^2 - 2x - 4 + 1 \geqslant (x + 1)^2 - 3x$ $[x \leqslant -1]$

457 $\frac{2(x - 3)}{3} - \frac{5(2x - 1)}{6} < \frac{2x - 4}{2} + 2$ $\left[x > -\frac{7}{12}\right]$

In una leva si ha equilibrio quando il prodotto della resistenza R per il suo braccio *br* è uguale al prodotto della potenza P per il suo braccio *bp*:

$$R \cdot br = P \cdot bp$$

211 In una leva in equilibrio la resistenza è inferiore di 24 kg alla potenza e i rispettivi bracci sono lunghi 49 m e 35 m. Calcola potenza e resistenza. **[84 kg; 60 kg]**

212 I bracci della potenza e della resistenza di una leva sono lunghi rispettivamente 25 cm e 30 cm. Sapendo che la leva è in equilibrio e che i 5/3 della potenza superano di 100 kg la resistenza, calcola potenza e resistenza. **[120 kg; 100 kg]**

213 I bracci della potenza e della resistenza di una leva in equilibrio misurano rispettivamente 14 cm e 21 cm. Se la potenza è minore di 27 kg del doppio della resistenza, calcola il valore di ciascuna forza. **[81 kg; 54 kg]**

214 Un solido di 90 kg è appeso a un'estremità di una leva mentre all'altra estremità è appeso un solido di peso pari a 3/2 del primo. Se la leva è in equilibrio ed è lunga complessivamente 36 cm, calcola le lunghezze dei due bracci per avere la posizione del fulcro tra potenza e resistenza. **[21,6 cm; 14,4 cm]**

Risoluzione di problemi mediante disequazioni

Risolvi con l'uso delle disequazioni i seguenti ***problemi aritmetici****.*

215 Determina quali valori può assumere un numero sapendo che il suo triplo aumentato di 10 è maggiore di 115. [$x > 35$]

216 Quali valori può assumere un numero se la sua terza parte aumentata di 7 è minore di 16? [$x < 27$]

217 Il doppio di un numero diminuito di 4 non supera 18. Quali valori può assumere? [$x \leqslant 11$]

218 Il quadruplo di un numero diminuito di 5 è almeno uguale a 35. Quali valori può assumere? [$x \geqslant 10$]

219 Quali valori può assumere un numero perché sia maggiore dei suoi 3/4 aumentati di 4? [$x > 16$]

220 Un numero è minore dei suoi 5/3 diminuiti di 2. Quali valori può assumere? [$x > 3$]

221 Un numero è tale che non supera i suoi 5/7 aumentati di 10. Quali valori può assumere? [$x \leqslant 35$]

222 Un numero è almeno uguale ai suoi 3/2 diminuiti di 8. Quali valori può assumere? [$x \leqslant 16$]

223 Per acquistare 5 penne non voglio spendere più di 23,15 euro. Quanto deve costare al massimo ogni penna? **[non più di 4,63 €]**

224 Per arrivare a Roma un automobilista deve impiegare meno di 7 ore. Se dista da Roma 770 km, a quale velocità deve viaggiare? [>**110 km/h**]

225 Un cartolaio ha acquistato 25 pacchi di pennarelli a 2,54 euro ciascuno. A quanto deve rivendere ciascun pacco se vuole realizzare un guadagno di almeno 36,50 euro? **[almeno 4 €]**

226 Con il vino contenuto in una damigiana della capacità di 106 l si vogliono riempire delle bottiglie della capacità di 2 l ciascuna. Quante bottiglie servono per svuotare la damigiana per almeno la sua metà? **[almeno 27]**

227 In un posteggio vi sono 125 posti; 45 sono già occupati e 7 sono riservati al personale di un negozio. Quante altre vetture possono usufruire del posteggio? **[al massimo 73]**

228 Andrea vuole comprare un giornale che costa 2,15 euro e alcuni pacchetti di figurine che costano 0,55 euro ciascuno. Quanti pacchetti potrà comprare se non vuole spendere più di 8,75 euro? **[al massimo 12]**

Risolvi con l'uso delle disequazioni i seguenti ***problemi geometrici****.*

229 La base di un rettangolo è i 9/5 dell'altezza e il perimetro non supera gli 84 cm. Quali valori può assumere l'altezza del rettangolo? **[$\leq$15 cm]**

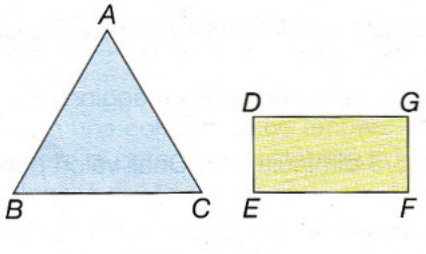
230 In un triangolo due lati misurano rispettivamente 18 cm e 12 cm. Quali valori può assumere la lunghezza del terzo lato? **[6 cm $< l <$ 30 cm]**

231 La base di un triangolo isoscele misura 48 cm. Quali valori può assumere il lato obliquo se il perimetro non deve superare i 128 cm? **[24 cm $< l <$ 40 cm]**

232 Nel quadrilatero $ABCD$ si hanno le seguenti relazioni: $AB = 45$ cm, $BC = \frac{4}{5} AB$ e $CD = BC - 8$ cm. Entro quali valori può variare la lunghezza del lato AD? **[0 $< l <$ 109 cm]**

233 La base di un rettangolo è i 3/4 dell'altezza. Quali valori può assumere l'altezza di questo rettangolo affinché il suo perimetro non superi quello di un quadrato avente il lato lungo 14 cm? **[$\leq$16 cm]**

234 Il triangolo equilatero ABC e il rettangolo $DEFG$ sono tali che $EF = AB - 2$ cm. Per quali valori di AB il perimetro del triangolo è maggiore di quello del rettangolo, sapendo che l'altezza del rettangolo misura 4 cm?



[> 4 cm]

235 Un triangolo, avente la base lunga 18 cm, non può avere l'area minore di 135 cm^2 e maggiore di 202,5 cm^2. Entro quali valori può variare la misura dell'altezza? **[15 cm $< h <$ 22,5 cm]**